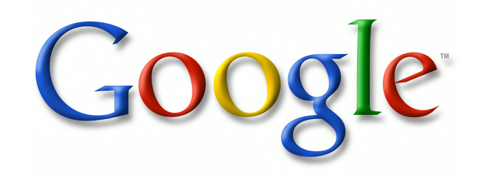



Hosted by Google

BEITRÄGE
ZUR
NUMERISCHEN LÖSUNG DER GLEICHUNGEN FÜNFTEN GRADES.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

EINER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT HALLE-WITTENBERG

VORGELEGT

VON

ARTHUR MORGENSTERN

AUS BERLIN.

HALLE A. S.

1907.

Referent: Professor Dr. A. Gutzmer.

Druck von W. Pormetter in Berlin.

Meinen lieben Eltern

in dankbarer Verehrung.

In der nachstehenden Arbeit handelt es sich um die Untersuchung der von Hermite, Brioschi, Kiepert und Klein-Gordan gegebenen theoretischen Lösungsmethoden der Gleichungen fünften Grades auf ihren praktischen Gebrauchswert. Es wird zunächst zu ermitteln gesucht, ob die gegebenen Formeln zur wirklichen Berechnung der Wurzeln einer Gleichung fünften Grades geeignet sind und ausreichen, sodann wird für jede einzelne Methode das Formelsystem aufgestellt, welches die praktische Berechnung unmittelbar ermöglicht.

Kiepert hat bei seiner Methode, die ich wegen der hinzugefügten allgemeinen Bemerkungen an den Anfang stelle, die in seinen Formeln auftretenden Vorzeichen unbestimmt gelassen. Es erwuchs daher zunächst die Aufgabe, diese Zeichen genau festzusetzen. Der Verfasser glaubt in diese Frage Licht gebracht zu haben. Hierbei hat sich herausgestellt, dafs in der von Kiepert benutzten Brioschischen Reduktionsformel der Jacobi-Kroneckerschen Resolvente auf den fünften Grad ein Vorzeichenfehler sich befindet, und dafs überhaupt die von Kiepert aufgestellten Formeln etwas umgestaltet werden müssen, wenn sie zu zahlenmäfsiger Berechnung der Wurzeln brauchbar werden sollen. Diesen Vorzeichenfehler haben wir natürlich auch bei der Brioschischen Lösung zu beachten. Bei dieser erscheint es für die numerische Durchführung der Wurzelbestimmung zweckmäfsiger, statt des von Brioschi benutzten Multiplikators die von letzterem eingeführten Gröfsen C_0, C_1, C_2, C_3 zu verwenden, die sich aus

den Koeffizienten der Jacobischen Relationen rational zusammensetzten. Bei Klein-Gordan ergeben sich bei der Berechnung der Ikosaederirrationalität aus der absoluten Invariante der elliptischen Funktionen Schwierigkeiten. Die Formeln, die Klein hierfür aufgestellt hat, enthalten Unstimmigkeiten, so dafs sie bei praktischer Anwendung nicht zum Ziele führen; auch sind sie wegen ihrer Länge wenig brauchbar. Ich habe für sie andre Beziehungen gegeben, die für die numerische Wurzelberechnung handlicher sind. Die Auflösung von Hermite, die in der von ihm entwickelten Form praktisch verwendbar ist, habe ich nur der Vollständigkeit wegen in meiner Arbeit mit aufgeführt.

Damit ist der Gang der Arbeit und ihr Ergebnis kurz gekennzeichnet. Es ist vielleicht nicht ohne Interesse zu bemerken, dafs grade die Prüfung der praktischen Anwendbarkeit der bekannten Lösungsmethoden der Gleichungen fünften Grades zur Aufdeckung und Aufhellung von Unstimmigkeiten der theoretischen Lösungen geführt hat, die bisher der Aufmerksamkeit entgangen zu sein scheinen.

I.

Auflösung nach Kiepert.

A.

Die Grösen

$$p_{\lambda,\mu} = p\left(\frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n}\right)$$
$$\lambda = 0, 1, 2 \ldots n$$
$$\mu = 0, 1, 2 \ldots n$$
$$\lambda = \mu = 0 \text{ ausgenommen,}$$

bilden, soweit sie von einander verschieden sind, das vollständige System der Teilwerte n ten Grades der Funktion p(u) und sind, wenn wir n als Primzahl voraussetzen, identisch mit dem reduzierten System der Teilwerte. Sie genügen einer Gleichung vom Grade $\frac{n^2-1}{2}$, der sogenannten Teilungsgleichung, deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen von g_2 und g_3 sind. Diese Teilungsgleichung besitzt, was für die Auflösung der Gleichungen fünften Grades von groser Wichtigkeit ist, Resolventen vom Grade $n+1$. Dem von Kiepert hierfür in den Mathematischen Annalen Band 26 gegebenen Beweis will ich einen zweiten zur Seite stellen und hieran einige verallgemeinerte Betrachtungen anknüpfen.

Unterwerfen wir $p_{\lambda,\mu}(\omega, \omega')$ einer linearen Periodentransformation, so ist

$$p\left(\frac{2\lambda'\omega_1+2\mu'\omega_1'}{n}\middle|\omega_1,\omega_1'\right)=p\left(\frac{2\lambda\omega+2\mu\omega'}{n}\middle|\omega,\omega'\right),$$

$$d'=\delta\lambda-\gamma\mu \qquad [\omega_1=\alpha\omega+\beta\omega'],$$

$$\mu'=-\beta\lambda+\alpha\mu \quad [\omega_1'=\gamma\omega+\delta\omega'].$$

Die transformierten Teilwerte sind also, abgesehen von der Reihenfolge, dieselben wie die ursprünglichen. Man kann auch die Gleichungen ansetzen

$$p\left(\frac{2\lambda\omega_1+2\mu\omega_1'}{n}\middle|\omega_1,\omega_1'\right)=p\left(\frac{2\lambda'\omega+2\mu'\omega}{n}\middle|\omega,\omega'\right),$$

wo

$$\lambda'=\alpha\lambda+\gamma\mu$$

$$\mu'=\beta\lambda+\delta\mu$$

ist. Nun ist

$$p_{\lambda+n,\mu+n}=p_{\lambda,\mu}.$$

Deshalb wollen wir uns $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Einfachheit wegen auf ihre mod. (n) kleinsten Reste reduziert denken. Weil ferner andrerseits zu jedem Zahlenquadrupel $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ für das

$$\alpha'\delta'-\beta'\gamma'=1+kn$$

ist, sich ein andres

$$\alpha=\alpha'+na \qquad \beta=\beta'+nb$$

$$\gamma=\gamma'+nc \qquad \delta=\delta'+nd$$

so bestimmen läſst, daſs

$$n(ad-bc)+(a\delta+d\alpha-b\gamma-c\beta)+k=0$$

ist, mithin

$$1) \qquad \alpha\delta-\beta\gamma=1,$$

so können wir die Gruppe, die zu der Teilungsgleichung gehört, durch die mod. (n) verschiedenen Substitutionen darstellen. Die Anzahl dieser Substitutionen berechnet sich leicht aus 1). Die Gleichung 1) ist eine diophantische Gleichung für γ und δ. Ihre Lösungen sind

$$\gamma=\gamma_0+\alpha t \qquad \delta=\delta_0+\beta t.$$

Für α und β sind n^2-1 Werte möglich, zu jedem derselben kommen noch n Werte von t hinzu, so daſs die gesuchte

Anzahl der mod. (n) verschiedenen Substitutionen $n(n^2-1)$ ist. Da weiter $p(u)$ eine gerade Funktion ist, so rufen zwei mod. (n) inkongruente Transformationen, die sich nur durch einen gemeinsamen Vorzeichenwechsel mod. (n) unterscheiden, dieselbe Umordnung unter den $p_{\lambda,\mu}$ hervor. Unsre Gruppe ist also von der Ordnung $\frac{n(n^2-1)}{2}$. Sie besitzt eine Untergruppe in den Substitutionen, bei denen

$$\beta \equiv 0 \text{ mod. (n)}$$

ist. Diese vertauschen nur die Werte

$$p_{10},\ p_{20},\ \ldots.\ p_{\frac{n-1}{2},0} \tag{2}$$

unter einander. Da nun die Kongruenz

$$\alpha\delta \equiv 1 \text{ mod. (n)}$$

$n(n-1)$ Lösungen hat, je zwei der hieraus entspringenden Substitutionen aber die Gröfsen 2) in derselben Weise permutieren, so ist die Ordnung der Untergruppe $\frac{n(n-1)}{2}$, ihr Index $n+1$. Bilden wir schliefslich eine Funktion der Teilwerte 2) $F\left(p_{10}, p_{20}, \ldots. p_{\frac{n-1}{2},0}\right)$, welche bei den Substitutionen der Untergruppe unverändert bleibt, so ist sie, wie gruppentheoretische Sätze lehren, die Wurzel einer Gleichung $(n+1)$ten Grades. Ihre Koeffizienten gestatten sämtliche Substitutionen der Gruppe der Teilungsgleichung und gehören mithin dem Körper an, welcher aus den Koeffizienten der Teilungsgleichung gebildet ist. Also erhalten wir den Satz, dafs die Teilungsgleichung Resolventen vom Grade $n+1$ besitzt. Da die Untergruppe unter den Werten 2) nur cyklische Vertauschungen hervorruft, so genügt es, für F eine cyklische Funktion zu nehmen.

Diese Betrachtungen, die für die Teilwerte $p\left(\frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n}\right)$ gelten, lassen sich erweitern auf die Teilwerte $p\left(u + \frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n}\right)$, die wir mit $p_{\lambda,\mu}(u)$ bezeichnen wollen.

Aus der Formel

$$p(nu) - p(u) = -\frac{\psi_{n+1}(u) \cdot \psi_{n-1}(u)}{\psi_n^2(u)}$$

ergibt sich, wenn wir für die Funktionen $\psi_m(u)$ die Funktion $p(u)$ wieder einführen und mit dem Nenner hinaufmultiplizieren, eine Gleichung vom Grade n^2, deren Wurzeln die Teilwerte $p_{\lambda,\mu}(u)$ sind, und deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen von $p(nu)$, g_2, g_3 sind. Dabei tritt $p(nu)$ nur in der ersten Potenz auf. Wir erhalten z. B. für

$n = 2$:

$$p(2u) - p(u) = -\frac{\psi_3(u) \cdot \psi_1(u)}{\psi_2^2(u)}$$

oder

$$p(2u) - p(u) = -\frac{3p^4(u) - \frac{3}{2} g_2 p^2(u) - 3g_3 p(u) - \frac{1}{16} g_2^2}{p'(u)^2}$$

oder

$$[4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3][p(2u) - p(u)] + 3p^4(u) - \frac{3}{2} g_2 p^2(u) - 3g_3 p(u) - \frac{1}{16} g_2^2 = 0$$

oder

$$p^4(u) + 4p(2u)p^3(u) - \frac{1}{2} g_2 p^2(u) + [g_2 p(2u) + 2g] p(u) + p(2u) g_3 + \frac{1}{16} g_2^2 = 0$$

d. h. eine Gleichung vierten Grades mit den Wurzeln

$$p(u),\ p(u+\omega),\ p(u+\omega'),\ p(u+\omega+\omega')$$

und mit Koeffizienten, die in $p(2u)$, g_2, g_3 rational sind.

Wenn nun eine Gleichung $m$ten Grades gegeben ist

$$x^m - f_1 x^{m-1} + f_2 x^{m-2} + \ldots\ldots = 0,$$

und wir setzen die Gleichung an

$$(x - x_2)(x - x_3) \ldots\ldots (x - x_m) = x^{m-1} - g_1 x^{m-2} + g_2 x^{m-3} \ldots\ldots,$$

so hängen die Koeffizienten g mit den Koeffizienten f durch die Relationen zusammen

$$f_1 = g_1 + x_1$$
$$f_2 = g_2 + x_1 g_1$$
$$\cdots\cdots$$
$$f_k = g_k + x_1 g_{k-1}$$

oder

$$g_1 = f_1 - x_1$$
$$g_2 = f_2 - f_1 x_1 + x_1^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_k = f_k - f_{k-1} x_1 + f_{k-2} x^2 + \ldots (-1)^k x_1^k.$$

Legen wir x_1 den Wert $p_{00}(u)$, $x_2, x_3, x_4 \ldots\ldots x_m$ die andern Werte $p_{\lambda,\mu}(u)$ bei, so bekommen wir, da f_k rationale Funktionen von $p(nu)$, g_2, g_3 sind und $p(nu)$ sich rational durch $p(u)$, g_2, g_3 ausdrücken läſst, den Satz:

g_k oder die symmetrischen Funktionen von $p_{\lambda,\mu}(u)$, $\lambda = \mu = 0$ ausgeschlossen, sind rationale Funktionen von $p(u)$, g_2, g_3.

Die verallgemeinerte Teilungsgleichung, der die $n^2 - 1$ Wurzeln

$$p\left(u + \frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n}\right),$$

zu denen $p_{0,0}(u)$ nicht gehört, genügen, besitzt Resolventen vom Grade $n + 1$. Zu einer solchen gelangen wir, wenn wir eine symmetrische Funktion F_1 der Teilwerte

3) $\quad p(u + k\omega_{\lambda,\mu}),\ p(u + k^2\omega_{\lambda,\mu}) \ldots\ldots\ldots p(u + k^k\omega_{\lambda,\mu})$

aufstellen. Hierbei soll k eine primitive Wurzel von n und k den kleinsten Wert bedeuten, welcher der Kongruenz $k^k \equiv 1$ mod. (n) genügt. Ist $p(u + \omega_{\lambda',\mu'})$ verschieden von den Gröſsen 3), so kommen unter den $p_{\lambda,\mu}(u)$ auch die Gröſsen vor

$$p(u + k\omega_{\lambda',\mu'}),\ p(u + k^2\omega_{\lambda',\mu'}) \ldots\ p(u + k^k\omega_{\lambda',\mu'}).$$

Wir bilden aus diesen die Funktion F_2. In ähnlicher Weise erhalten wir F_3 u. s. w. Von den verallgemeinerten Teilwerten

$$p(u + k\omega_{\lambda,\mu}),\quad p(u + k^2\omega_{\lambda,\mu}),\ \ldots\ p(u + k^k\omega_{\lambda,\mu})$$
$$p(u + k\omega_{\lambda',\mu'}),\quad p(u + k^2\omega_{\lambda',\mu'}),\ \ldots\ p(u + k^k\omega_{\lambda',\mu'})$$
$$p(u + k\omega_{\lambda'',\mu''}),\ p(u + k^2\omega_{\lambda'',\mu''}),\ \ldots\ p(u + k^k\omega_{\lambda'',\mu''})$$
$$— — — — — — — — — — — — — —$$

sind keine einander gleich; denn sonst müfsten von den Argumenten

$$u + k\omega_{\lambda,\mu}, \quad u + k^2\omega_{\lambda,\mu}, \quad \ldots \quad u + k^k\omega_{\lambda,\mu}$$
$$u + k\omega_{\lambda',\mu'}, \quad u + k^2\omega_{\lambda',\mu'}, \quad \ldots \quad u + k^k\omega_{\lambda',\mu'}$$
$$u + k\omega_{\lambda'',\mu''}, \quad u + k^2\omega_{\lambda'',\mu''}, \quad \ldots \quad u + k^k\omega_{\lambda'',\mu''}$$
— — — — — — — — — — — — —

einige einander kongruent mod. (n) sein. Dies kann aber nicht der Fall sein. Nehmen wir z. B. an, zwei Gröfsen einer und derselben Reihe wären $\equiv$ mod. (n), z. B.

$$k^i\omega_{\lambda,\mu} \equiv k^j\omega_{\lambda,\mu} \text{ mod. (n)} \quad (i > j),$$

so müfste

$$k^{i-j} \equiv 1 \text{ mod. (n)}$$

sein, also

$$i - j < k,$$

was gegen die Voraussetzung ist. Und wäre eine Gröfse der einen Reihe kongruent mod. (n) einer Gröfse einer andern Reihe, z. B.

$$k^\alpha\omega_{\lambda,\mu} \equiv k^\beta\omega_{\lambda',\mu'} \text{ mod. (n)},$$

so müfste

$$k^{\alpha-\beta}\omega_{\lambda,\mu} \equiv \omega_{\lambda',\mu'} \text{ mod. (n)}$$

sein. In dieser Kongruenz liegt aber ein Widerspruch gegen die Festsetzung, dafs $p(u + \omega_{\lambda',\mu'})$ ungleich den Ausdrücken in 3) ist. Da nun $k = n - 1$ ist, so erhalten wir die $n + 1$ Funktionen

$$F_1, \; F_2, \; \ldots\ldots \; F_{n+1}.$$

Diese sind die Wurzeln einer Gleichung $(n+1)$ten Grades, deren Koeffizienten rationale Funktionen von $p(u)$, g_2, g_3 sind. Man kann den Nachweis, dafs die verallgemeinerte Teilungsgleichung eine Resolvente $(n+1)$ten Grades besitzt, in ähnlicher Weise wie oben auch mit Hilfe gruppentheoretischer Betrachtungen durchführen und mit ihrer Hilfe zeigen, da die Untergruppe, die charakterisiert ist durch

$$\beta \equiv 0 \text{ mod. (n)},$$

nur cyklisch die Werte 3) vertauscht, dafs es genügt, statt der symmetrischen Funktion F eine cyklische zu nehmen. Führen wir die Funktion $f_\infty^{-2}(u)$ ein durch die Definition

$$f_\infty^{-2}(u) = \prod_{\alpha=1}^{n-1}\left[p\left(u + \frac{2\alpha\omega}{n}\right) - p\left(u + \frac{4\alpha\omega}{n}\right)\right]$$

und entwickeln die rechte Seite mit Hilfe der σ-Funktionen, so erhalten wir die Darstellungsformen:

$$f_\infty^{-2}(u) = c\, f_\infty^{-2} \prod_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\sigma\left(2u + \frac{4\alpha\omega}{n}\right)}{\sigma^4\left(u + \frac{2\alpha\omega}{n}\right)}$$

oder

$$f_\infty^{-2}(u) = c_1 f_\infty^{-2} \prod_{\alpha=1}^{n-1} p'\left(u + \frac{2\alpha\omega}{n}\right)$$

oder

$$f_\infty^{-2}(u) = c_2 f_\infty^{-2} \prod_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\sigma_1\left(u + \frac{2\alpha\omega}{n}\right)\cdot\sigma_2\left(u + \frac{2\alpha\omega}{n}\right)\cdot\sigma_3\left(u + \frac{2\alpha\omega}{n}\right)}{\sigma^3\left(u + \frac{2\alpha\omega}{n}\right)}$$

u. s. w.

Desgleichen gewinnt man entweder direkt durch Entwicklung von σ-Funktionen oder auf dem Wege der Transformation die Werte für $f_\nu^{-2}(u)$,

$$\nu = 0, 1 \ldots\ldots n - 1.$$

$$f_\infty^{-2}(u),\quad f_0^{-2}(u),\quad \ldots\ldots\quad f_{n-1}^{-2}(u)$$

sind dann die Wurzeln einer Gleichung $(n+1)$ ten Grades, deren Koeffizienten rationale Funktionen von $p(u)$, g_2, g_3 sind.

Kehren wir zur Kiepertschen Arbeit zurück. Dort sind die Relationen:

$$\prod_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{2\alpha p,\, 2\alpha q} = \prod_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\alpha p,\, \alpha q}$$

$$\prod_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{3\alpha p,\, 3\alpha q} = (-1)^1 \prod_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\alpha p,\, \alpha q}$$

von Wichtigkeit. Ich will, bevor ich zu den Zahlenbeispielen übergehe, noch die Herleitung dieser Formeln auf dem Wege der Produktenentwicklung bringen.

Aus der Definition

$$\sigma_{\alpha p, \alpha q} = - e^{-2\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 \tilde{\eta}\tilde{\omega}} \sigma\left(\frac{2\alpha\tilde{\omega}}{n}\right)$$

folgt

I

$$-\sigma_{1p,1q} = \frac{2\omega}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon^{+\frac{1}{2}} - \varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{2i} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - h^{2\nu}\varepsilon}{1 - h^{2\nu}} \cdot \frac{1 - h^{2\nu}\varepsilon^{-1}}{1 - h^{2\nu}}$$

$$-\sigma_{2p,2q} = \frac{2\omega}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon - \varepsilon^{-1}}{2i} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - h^{2\nu}\varepsilon^2}{1 - h^{2\nu}} \cdot \frac{1 - h^{2\nu}\varepsilon^{-2}}{1 - h^{2\nu}}$$

— — — — — — — — — — —

$$-\sigma_{\frac{n-1}{2}p, \frac{n-1}{2}q} = \frac{2\omega}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon^{\frac{n-1}{4}} - \varepsilon^{-\frac{n-1}{4}}}{2i} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - h^{2\nu}\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}}{1 - h^{2\nu}} \cdot \frac{1 - h^{2\nu}\varepsilon^{-\frac{n-1}{2}}}{1 - h^{2\nu}}$$

II

$$-\sigma_{2p,2q} = \frac{2\omega}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon - \varepsilon^{-1}}{2i} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - h^{2\nu}\varepsilon^2}{1 - h^{2\nu}} \cdot \frac{1 - h^{2\nu}\varepsilon^{-2}}{1 - h^{2\nu}}$$

$$-\sigma_{4p,4q} = \frac{2\omega}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon^{-2}}{2i} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - h^{2\nu}\varepsilon^4}{1 - h^{2\nu}} \cdot \frac{1 - h^{2\nu}\varepsilon^{-4}}{1 - h^{2\nu}}$$

— — — — — — — — — — — —

$$-\sigma_{(n-1)p,(n-1)q} = \frac{2\omega}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon^{\frac{n-1}{2}} - \varepsilon^{-\frac{n-1}{2}}}{2i} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - h^{2\nu}\varepsilon^{n-1}}{1 - h^{2\nu}} \cdot \frac{1 - h^{2\nu}\varepsilon^{-(n-1)}}{1 - h^{2\nu}}$$

III

$$-\sigma_{3p,3q} = \frac{2\omega}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}} - \varepsilon^{-\frac{3}{2}}}{2i} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - h^{2\nu}\varepsilon^3}{1 - h^{2\nu}} \cdot \frac{1 - h^{2\nu}\varepsilon^{-3}}{1 - h^{2\nu}}$$

$$-\sigma_{6p,6q} = \frac{2\omega}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon^{\frac{6}{2}} - \varepsilon^{-\frac{6}{2}}}{2i} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - h^{2\nu}\varepsilon^6}{1 - h^{2\nu}} \cdot \frac{1 - h^{2\nu}\varepsilon^{-6}}{1 - h^{2\nu}}$$

— — — — — — — — — — — —

$$-\sigma_{\frac{3}{2}(n-1)p, \frac{3}{2}(n-1)q} =$$

$$\frac{2\omega}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}(n-1)} - \varepsilon^{-\frac{3}{4}(n-1)}}{2i} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - h^{2\nu}\varepsilon^{\frac{3}{2}(n-1)}}{1 - h^{2\nu}} \cdot \frac{1 - h^{2\nu}\varepsilon^{-\frac{3}{2}(n-1)}}{1 - h^{2\nu}}$$

Das Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-h^{2\nu}\varepsilon}{1-h^{2\nu}} \cdot \frac{1-h^{2\nu}\varepsilon^{-1}}{1-h^{2\nu}} \cdot \frac{1-h^{2\nu}\varepsilon^{2}}{1-h^{2\nu}} \cdot \frac{1-h^{2\nu}\varepsilon^{-2}}{1-h^{2\nu}}$$

$$\ldots\ldots\ldots \frac{1-h^{2\nu}\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}}{1-h^{2\nu}} \cdot \frac{1-h^{2\nu}\varepsilon^{-\frac{n-1}{2}}}{1-h^{2\nu}}$$

aus I ist gleich $\frac{Z}{N}$

$$Z = \prod_{\nu=1}^{\infty} [1-h^{2\nu}(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{n-1}) + ch^{4\nu}(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{n-1})$$

$$- ch^{6\nu}(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{n-1}) + \ldots\ldots - h^{2n\nu}]$$

$$N = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2\nu})^n.$$

Substituieren wir für ε ε^2 oder für ε ε^3, so haben wir das Produkt der entsprechenden Faktoren von II resp. III vor uns. Der Zähler wird für I, II und III gleich $= \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2n\nu})$,

da $$1+\varepsilon^{\alpha}+{}^{2\alpha}+\ldots\ldots+\varepsilon^{(n-1)\alpha}=0,$$

der Nenner bleibt derselbe, $\frac{\omega}{\pi}$ tritt in gleicher Weise auf, und das Produkt der übrig bleibenden Faktoren ist gleich

$$4) \qquad 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \ldots\ldots \sigma\left(\frac{\frac{n-1}{2}k}{n}\right),$$

wo k, den Entwicklungen I, II, III entsprechend, den Wert 1, 2, 3 hat. Wenn nun bewiesen ist, dafs das Produkt 4) für

$k=1$ den Wert $+\sqrt{n}$,
$k=2$ „ „ $+\sqrt{n}$,
$k=3$ „ „ $(-1)^1\sqrt{n}$

hat, so erhalten wir sofort das gesuchte Resultat. In der Kreisteilungslehre wird die Gleichung

$$5)\quad 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\left(\frac{2\pi k'}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{4\pi k'}{n}\right) \ldots \sin\left(\frac{(n-1)\pi k'}{n}\right) = \pm\sqrt{n}$$

abgeleitet, wo k' eine ganze Zahl ist. Wir gebrauchen hier aber für k' die Werte $^1/_2$, $^2/_2$, $^3/_2$. Wenn wir mit $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$ eine primitive Wurzel von $x^n = 1$ bezeichnen, so ist

$$Q = \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{n-\frac{1}{2}}\right)\left(\varepsilon^{\frac{2}{2}} - \varepsilon^{n-\frac{2}{2}}\right) \ldots \left(\varepsilon^{\frac{n-1}{4}} - \varepsilon^{n-\frac{n-1}{4}}\right)$$

gleich

$$i^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \ldots \sin\left(\frac{\frac{n-1}{2}\pi k}{n}\right).$$

Multiplizieren wir Q mit

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon^{\frac{2}{2}} \cdot \varepsilon^{\frac{3}{2}} \ldots\ldots \varepsilon^{\frac{n-1}{4}} = \varepsilon^{\frac{n^2-1}{16}},$$

sodann mit

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon^{-\frac{2}{2}} \cdot \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \ldots\ldots \varepsilon^{-\frac{n-1}{4}} = \varepsilon^{-\frac{n^2-1}{16}},$$

so bekommen wir

$$6)\qquad \varepsilon^{\frac{n^2-1}{16}} Q = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 - 1) \ldots\ldots \left(\varepsilon^{\frac{n-1}{2}} - 1\right)$$

$$7)\qquad \varepsilon^{-\frac{n^2-1}{16}} Q = (1 - \varepsilon^{n-1})(1 - \varepsilon^{n-2}) \ldots \left(1 - \varepsilon^{n-\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right)$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} (\varepsilon^{n-1} - 1)(\varepsilon^{n-2} - 1) \ldots \left(\varepsilon^{n-\frac{n-1}{2}} - 1\right).$$

Die auf der rechten Seite von 6) und 7) auftretenden Exponenten sind

$$1, 2 \ldots \frac{n-1}{2},$$

$$n-1,\ n-2 \ldots \frac{n+1}{2},$$

d. h. sie umfassen alle ganzen Zahlen von 1 bis $n - 1$. Das Produkt von 6) und 7) gibt

$$Q^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \Pi (\varepsilon - 1).$$

Da nun der Grad der Kreisteilungsgleichung eine gerade Zahl ist, nämlich $= \varphi(n) = n - 1$, so ist

$$\Pi(\varepsilon - 1) = \Pi(1 - \varepsilon).$$

Nun ist $\Pi(1-\varepsilon)=n$, mithin

$$Q^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n,$$

$$Q = \pm i^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n},$$

folglich

$$8)\qquad 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \ldots \sin\left(\frac{\frac{(n-1)}{2}\pi k}{n}\right) = \pm\sqrt{n}.$$

Wenn in 8) $k=1$ ist, so sind die Winkel

$$\frac{\pi}{n},\ \frac{2\pi}{n},\ \ldots\ \frac{\frac{n-1}{2}\pi}{n}\ \text{alle} < \pi,$$

sämtliche Sinus positiv, mithin gilt in 8) das positive Zeichen. Dasselbe gilt für $k=2$. Für $k=3$ sind die Winkel

$$9)\qquad \frac{3\pi}{n},\ \frac{6\pi}{n} \ldots \frac{3\left(\frac{n-5}{2}\right)}{n}\pi,\ \frac{3\left(\frac{n-3}{2}\right)\pi}{n},\ \frac{3\left(\frac{n-1}{2}\right)\pi}{n}$$

nicht mehr alle $<\pi$. Man könnte hier durch zahlentheoretische Erwägungen, wie man sie gewöhnlich in der Kreisteilungslehre anstellt, das Vorzeichen ermitteln, jedoch kommen wir auch auf dem eingeschlagenen elementareren Wege zum Ziele. Kein Winkel von 9) kann $> 2\pi$ sein; denn stellen wir 9) allgemein durch

$$\frac{3 \cdot \frac{n-x}{2} \cdot \pi}{n}$$

dar, so müfste $\frac{3 \cdot \frac{n-x}{2}\pi}{n} > 2\pi$ sein oder $-3x > n$, wo x und n positive ganze Zahlen sind. Diese Ungleichung ist unmöglich, daher sind alle Winkel 9) $< 2\pi$. Die Winkel nun, die zwischen π und 2π liegen, bei denen der Sinus also negativ ist, müssen die Ungleichung erfüllen $\frac{3 \cdot \left(\frac{n-x}{2}\right) \cdot \pi}{n} > \pi$ oder $n > 3x$ oder, wenn wir $n = 6l \pm 1$ annehmen, $6l \pm 1 > 3x$. Da

aber nach 9) x nicht gleich Null noch gleich einer geraden Zahl sein kann, so kann x nur die ersten l ungeraden Zahlen annehmen. Mithin sind l der Sinus negativ; also steht in 8) für $k = 3$ das Vorzeichen $(-1)^l$. Es ist daher die Richtigkeit obiger Relationen vollständig auch auf diesem Wege dargetan.

Schliefslich läfst sich der Satz, dafs die Koeffizienten der Resolvente $(n+1)$ ten Grades nicht nur rationale Funktionen von g_2 und g_3 sind, sondern ganze rationale Funktionen, auch ohne Rechnung so dartun. Aus der Darstellung der Gröfsen

$$f^{-2} = \prod_{\alpha} \left[p\left(\frac{2\,\alpha\,\tilde{\omega}}{n}\right) - p\left(\frac{4\,\alpha\,\tilde{\omega}}{n}\right) \right]$$

folgt, dafs die Koeffizienten der Resolvente $(n+1)$ten Grades für f^{-2} ganze rationale Funktionen R_i der Teilwerte $p_{\lambda,\mu}$ sind. Diese sind gleich rationalen Funktionen von g_2 und g_3, d. h. gleich symmetrischen Funktionen S_i der $p_{\lambda,\mu}$. Ist nun irgendein S_i gebrochen, so mufs der Nenner von S_i im Zähler als Faktor enthalten sein, da sonst die ganze rationale Funktion R_i nicht gleich S_i sein könnte. Der übrig bleibende Faktor im Zähler ist aber eine symmetrische Funktion, da im andern Falle der ganze Zähler keine symmetrische Funktion sein könnte. Daher ist S_i eine ganze symmetrische Funktion der Teilwerte $p_{\lambda,\mu}$ oder eine ganze rationale Funktion von g_2 und g_3.

B.

Wie wollen die Kiepertsche Methode jetzt auf ihre praktische Brauchbarkeit hin prüfen. Der einfachste Weg, der sich hier wie auch bei den andern Methoden bietet, ist der, ein Beispiel durchzuführen und zu sehen, ob wir wirklich zu Wurzeln einer gegebenen Gleichung gelangen. Es genügt hierbei, eine Wurzel zu berechnen, da zugleich mit ihr auch die übrigen gegeben sind, wie aus den einzelnen Formelsystemen, die ich aufstellen werde, zu ersehen ist. Ebenso kann ich im folgenden von der Reduktion einer Gleichung fünften Grades auf eine ihrer Hauptformen absehen,

da die hierzu nötigen Operationen einer zahlenmäfsigen Durchführung keinerlei Hindernisse bieten.

Kiepert stellt im Journal f. reine u. angew. Mathem. Bd. 87 alle zur Auflösung einer Gleichung nötigen Formeln zusammen, läfst aber die Frage offen, welche Vorzeichen in ihnen zu verwenden sind. Man erkennt leicht, dafs die Gleichungen

$$1728\, g_2^3\, \Delta l = 8\Delta^2\alpha^3 - 72\,\Delta\alpha\beta^2 + 216\, g_3\,(\Delta\alpha^2\beta - \beta^3)$$
$$1728\, g_2^3\, \Delta m = \Delta^2\alpha^4 + 18\,\Delta\alpha^2\beta^2 - 27\,\beta^4 + 216\, g_3\,\alpha\beta^3$$
$$1728\, g_2^3\, \Delta^2 n = \Delta^3\alpha^5 + 10\,\Delta^2\alpha^3\beta^2 + 45\,\Delta\alpha\beta^4 + 216\, g_3\beta^5$$

befriedigt werden für jeden der beiden Werte aus

$$11)\qquad (l^4 - lmn + m^3)\,\alpha^2 + (11\,l^3 m + l n^2 - 2 m^2 n)\,\alpha + (-27\,l^3 n + 64\,l^2 m^2 + m n^2) = 0$$

und für die Werte

$$12)\qquad \pm 12\, g_2 = l\alpha^2 + 3\,m\alpha - 3\,n$$
$$\pm \Delta = l^2\,[(ln - m^2)\,\alpha + mn]$$
$$\beta^2 = \pm\, l^3\,[l^2\alpha^2 + 11\,lm\alpha + 64\,m^2 - 27\,ln],$$

wenn man von den doppelten Vorzeichen entweder das obere oder das untere nimmt. Es bleibt somit nur die Quadratwurzel in

$$\beta^2 = \pm\, l^3\,(l^2\alpha^2 + 11\,lm\alpha + 64\,m^2 - 27\,ln)$$

zweifelhaft. Ich werde zu den vier Vorzeichenkombinationen, die in 11) und 12) liegen, und die wir soeben als möglich festgestellt haben, Beispiele geben und für β zunächst in jedem einzelnen Fall die richtige Quadratwurzel bestimmen.

Zu lösen sei

$$\text{I.}\quad z^5 + 5z^2 + 5z - 5 = 0.$$

Hier ist $l = 1$, $m = -1$, $n = -5$, α ergibt sich, wenn wir diese Werte in 11) eintragen, aus

$$-5\alpha^2 + 24\alpha = -174.$$

Es ist
$$\alpha_1 = -3{,}968674$$
$$\alpha_2 = 8{,}768\ldots$$

Verfolgen wir α_1 weiter, so finden wir aus 12) für die oberen Vorzeichen

$$g_2 = 3,554699$$
$$\Delta = 28,812041$$
$$\beta^2 = 258,40578.$$

h läſst sich numerisch am besten aus der stark konvergierenden Reihe gewinnen

$$h = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \ldots,$$

in der $$l = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}}$$ ist.

Es ist, wenn wir in

$$g_3 = \pm \sqrt{\frac{g_2{}^3 - \Delta}{27}}$$

das positive Vorzeichen nehmen,

$$g_3 = 0,7723162.$$

Die Wurzeln von

$$4\,p^3 - 3,554699\,p - 0,7723162 = 0$$

sind
$$e_1 = 1,0367762,$$
$$e_2 = -\,0,80560952,$$
$$e_3 = -\,0,23116686.$$

Weiter ist

$$l = \frac{\sqrt[4]{1,0367762 + 0,8056092} - \sqrt[4]{1,0367762 + 0,23116686}}{\sqrt[4]{1,0367762 + 0,8056092} + \sqrt[4]{1,0367762 + 0,23116686}}$$

$$h = 0,023337102.$$

Aus h können wir y_r bestimmen, und zwar nach Kiepert durch die Beziehungen:

$$B \quad = \Delta^{1/6} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda\, h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}$$

$$B\,f_\infty = \sqrt{5} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda\, h^{\frac{5(6\lambda+1)^2}{12}}$$

$$B\,f \;= -\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda\, \varepsilon^{r(6\lambda+1)^2}\, h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{60}}$$

$$(r = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \left[(f_\infty^2 - f_0^2)(f_2^2 - f_3^2)(f_4^2 - f_1^2) \right]^{1/2}$$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \left[(f_\infty^2 - f_1^2)(f_3^2 - f_4^2)(f_0^2 - f_2^2) \right]^{1/2}$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \left[(f_\infty^2 - f_2^2)(f_4^2 - f_0^2)(f_1^2 - f_3^2) \right]^{1/2}$$

$$y_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \left[(f_\infty^2 - f_3^2)(f_0^2 - f_1^2)(f_2^2 - f_4^2) \right]^{1/2}$$

$$y_4 = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \left[(f_\infty^2 - f_4^2)(f_1^2 - f_2^2)(f_3^2 - f_0^2) \right]^{1/2}.$$

Diese Gleichungen sind für eine zahlenmäfsige Durchführung sehr umständlich und lassen sich besser durch folgende ersetzen. Fragen wir uns, welche Potenzen von ε in der Summe

$$13) \qquad \sum (-1)^\lambda \, \varepsilon^{(6\lambda+1)^2} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{60}}$$

möglich sind. $(6\lambda+1)^2$ kommt nur mod. 5 in Betracht. Wir erhalten also alle Werte von $\varepsilon^{(6\lambda+1)^2}$, wenn λ die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 durchläuft. Es ist $\varepsilon^{(6\lambda+1)^2}$

für	$\lambda = 0$	gleich	ε^1
„	$\lambda = 1$	„	ε^4
„	$\lambda = 2$	„	ε^4
„	$\lambda = 3$	„	ε^1
„	$\lambda = 4$	„	1.

Es kommen also in 13) von $\varepsilon^{(6\lambda+1)^2}$ nur die Werte 1, ε, ε^4 vor. Setzen wir

$$f_1 = A_0 + \varepsilon^1 A_1 + \varepsilon^4 A_2$$

und berechnen aus

$$B = \Delta^{1/6} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}$$

$$B\,(A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^4 A_2) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda \, \varepsilon^{(6\lambda+1)^2} \, h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{60}}$$

die Gröfsen A_0, A_1, A_2, sodann

$$C_0 = -A_1(4A_0^2 - A_1A_2),$$
$$C_1 = 2A_0A_1^2 - A_2^3,$$
$$C_2 = -(2A_0A_2^2 - A_1^3),$$
$$C_3 = A_2(4A_0^2 - A_1A_2),$$

so ist

$$y_0 = C_0 + C_1 + C_2 + C_3,$$
$$y_1 = \varepsilon C_0 + \varepsilon^2 C_1 + \varepsilon^3 C_2 + \varepsilon^4 C_3,$$
$$y_2 = \varepsilon^2 C_0 + \varepsilon^4 C_1 + \varepsilon^1 C_2 + \varepsilon^3 C_3,$$
$$y_3 = \varepsilon^3 C_0 + \varepsilon^1 C_1 + \varepsilon^4 C_2 + \varepsilon^2 C_3,$$
$$y_4 = \varepsilon^4 C_0 + \varepsilon^3 C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \varepsilon^1 C_3.$$

Für $h = 0{,}0233371$ ist

$$B = \sqrt[6]{28{,}812041 \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda\, 0{,}0233371^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}} = 1{,}2794683$$

$$A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^4 A_2 = \frac{-\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda\, \varepsilon^{(6\lambda+1)^2} \cdot 0{,}0233371^{\frac{(6\lambda+1)^2}{60}}}{1{,}2794683}$$

$$A_0 = 0{,}16330143,$$
$$A_1 = -0{,}73452685,$$
$$A_2 = 0{,}03630549$$

$$C_0 = 0{,}097939448, \qquad C_1 = 0{,}17616405$$
$$C_2 = -0{,}39672942, \qquad C_3 = 0{,}004840857$$

$$y_0 = -0{,}11778507,$$
$$y_1 = 0{,}21020195 + i \cdot 0{,}42528035,$$
$$y_2 = -0{,}15130944 - i \cdot 0{,}49013204,$$
$$y_3 = 0{,}21020195 - i \cdot 0{,}42528035,$$
$$y_4 = -0{,}15130944 + i \cdot 0{,}49013204.$$
$$\mathbf{z_0 = 0{,}61042649,}$$
$$\mathbf{z_1 = 1{,}0331401 - i \cdot 1{,}6144967,}$$
$$\mathbf{z_2 = -1{,}3383514 + i \cdot 0{,}66202175,}$$
$$\mathbf{z_3 = 1{,}0331401 + i \cdot 1{,}6144967,}$$
$$\mathbf{z_4 = -1{,}3383514 - i \cdot 0{,}66202175.}$$

Aus y_r ergibt sich ein richtiger Wert für z_r nur, wenn wir

$$\beta = -\sqrt{\pm l^3(l^2\alpha^2 + 111\, l m \alpha + 64 m^2 - 27 l n)}$$

setzen. Im Beispiel I haben wir für α aus 11) α_1, in 12) die positiven Vorzeichen $[+\Delta, +g_2, +\beta^2]$ genommen. Im Beispiel II wollen wir folgende Kombination wählen

$$[\alpha_2, \ +\Delta, \ +g_2, \ +\beta^2].$$

Gegeben sei

$$\text{II.} \quad z^5 + 5z^2 - 5z + 5 = 0.$$

Es ist $\alpha_2 = 6{,}189255$, $g_2 = 3{,}4895554$,
$g_3 = 0{,}686788$, $\Delta = 29{,}75702$, $\beta^2 = 35{,}38871$,
$e_1 = 1{,}020145$, $e_2 = -0{,}206976$, $e_3 = -0{,}813167$,
$h = 0{,}02507084$, $B = 1{,}293966$, $A_0 = 0{,}166366$,
$A_1 = -0{,}727226$, $A_2 = 0{,}038060$, $C_0 = 0{,}1006399$,
$C_1 = 0{,}1759128$, $C_2 = -0{,}385081$, $C_3 = 0{,}005267$,

$$y_0 = -0{,}1032617$$
$$y_1 = 0{,}201948 + i \cdot 0{,}420449$$
$$y_2 = -0{,}150317 - i \cdot 0{,}4774785$$
$$y_3 = 0{,}201948 - i \cdot 0{,}420449$$
$$y_4 = -0{,}150317 + i \cdot 0{,}4774785.$$

Für β ist hier nur die negative Quadratwurzel zulässig

$$\beta = -5{,}948840.$$

Die Wurzeln von II sind

$$\mathbf{z_0 = -2{,}050938}$$
$$\mathbf{z_{1,3} = 0{,}6706555 \pm i \cdot 0{,}8481365}$$
$$\mathbf{z_{2,4} = 0{,}3548042 \pm i \cdot 1{,}3998277.}$$

Im dritten Beispiel sei die Kombination $[\alpha_2, -\Delta, -g_2, -\beta^2]$.

$$\text{III.} \quad z^5 - 5z^2 + 5z + 10 = 0.$$

Es ist $\alpha_2 = 1{,}8371$, $g_2 = 3{,}24053$,
$g_3 = 0{,}376179$, $\Delta = 30{,}2081$, $\beta^2 = 357{,}5837$,
$e_2 = 0{,}118119$, $e_2 = 0{,}9533036$, $e_3 = 0{,}835184$,
$h = 0{,}0319802$, $B = 1{,}323276$, $A_0 = 0{,}180046$,
$A_1 = -0{,}714291$, $A_2 = 0{,}0453829$, $C_0 = 0{,}115774$,
$C_1 = 0{,}183629$, $C_2 = -0{,}365181$, $C_3 = 0{,}00735578$,

$$y_0 = -0{,}0584213$$
$$y_{1,3} = 0{,}184927 \pm i \cdot 0{,}425695$$
$$y_{2,4} = -0{,}155717 \mp i \cdot 0{,}458223.$$

Auch hier gibt nur $\beta = -\sqrt{f(\alpha)}$ einen richtigen Wert für z.

$$\mathbf{z_0 = -0{,}948047}$$
$$\mathbf{z_{1,3} = 1{,}453332 \pm i \cdot 0{,}789366}$$
$$\mathbf{z_{2,4} = -0{,}979284 \pm i \cdot 1{,}702182}.$$

Die Gleichungen I bis III sind nicht metacyklisch, d. h. ihre Lösung läſst sich nicht auf eine Kette von cyklischen Gleichungen zurückführen. Die Kiepertsche Methode gilt aber, wie man leicht erkennt, auch für metacyklische Gleichungen. Ehe ich zu der noch fehlenden vierten Kombination übergehe, will ich in derselben Weise wie in III die Wurzeln einer metacyklischen Gleichung berechnen, nämlich von

$$\text{IV.} \quad z^5 - z^2 + 2 = 0.$$

Es ist $\alpha_2 = 0{,}54057$, $g_2 = 0{,}504870$,
$g_2 = 0{,}0666776$, $\Delta = 0{,}00864912$, $\beta^2 = 0{,}0864935$,
$e_1 = 0{,}408665$, $e_2 = -0{,}235349$, $e_3 = -0{,}173316$,
$h = 0{,}00632977$, $B = 0{,}297117$, $A_0 = 0{,}408305$,
$A_1 = -3{,}093477$, $A_2 = 0{,}0538918$, $C_0 = 2{,}578615$,
$C_1 = 7{,}814476$, $C_2 = -29{,}605717$, $C_3 = 0{,}0449223$,

$$y_0 = -19{,}16770$$
$$y_{1,3} = 18{,}44020 \pm i \cdot 24{,}40472$$
$$y_{2,4} = 8{,}856350 \pm i \cdot 34{,}09945.$$

$$\mathbf{z_0 = -1}$$
$$\mathbf{z_{1,3} = 0{,}9755740 \pm i \cdot 0{,}5282445},$$
$$\mathbf{z_{2,4} = 0{,}4755687 \pm i \cdot 1{,}1827394}.$$

In I—IV war $\beta = -\sqrt{f(\alpha)}$. Man könnte daher meinen, daſs für β jedesmal die negative Quadratwurzel zu nehmen sei. Für die vierte Kombination führt aber z. B. in der Gleichung $z^5 - 5z^2 - 5z - 5 = 0$ $[\alpha_1, -\Delta, -g_{21} - \beta^2]$ nur $\beta = +\sqrt{f(\alpha)}$ zu den Wurzeln z_r. Die Berechnung im einzelnen will ich nicht weiter anführen. Auch für die andern Kombinationen

lassen sich Gleichungen finden, bei denen nur $\beta = +\sqrt{f(\alpha)}$ verwendet werden darf, für

$[\alpha_2, -\Delta, -g_2, -\beta^2]$ z. B. bei $z^5 - 5z^2 + 5z + 5 = 0$

$[\alpha_1, +\Delta, +g_2, +\beta^2]$ „ „ $z^5 + 5z^2 + 5z - 10 = 0$

$[\alpha_1, +\Delta, +g_2, +\beta^2]$ „ „ $z^5 + z^2 - 2 = 0.$

Aus diesen Beispielen ergibt sich das Resultat, dafs für β bald das positive, bald das negative Vorzeichen das allein richtige ist. Welches aber zu benutzen ist, müssen wir in jedem einzelnen Falle empirisch bestimmen. Mir ist es, glaube ich, gelungen, in die Vorzeichenfrage etwas Licht auf folgendem Wege zu bringen. Die Formel $\beta^2 = f(\alpha)$ lasse ich fallen, ich stelle dafür eine andere auf, die β nur in der ersten Potenz enthält. Aus 10) folgt

$$\Delta^2\left[8\alpha^3 - \frac{72\alpha(m\alpha - n)}{l}\right] + 216 g_3 \beta \Delta \left[\alpha^2 - \frac{m a - n}{l}\right] - 1728 g_2^3 \Delta l = 0$$

$$\Delta^2\left[\alpha^4 + \frac{18\alpha^2(m\alpha - n)}{l} - \frac{27(m\alpha - n)^2}{l^2}\right] + 216 g_3 \Delta \beta \alpha \cdot \frac{m\alpha - n}{l} - 1728 g_2^3 \Delta m = 0.$$

Eliminieren wir Δ, so ist

$$216 g_3 \beta \left(\frac{1}{l^2}[8\alpha^3 l - 72 m\alpha^2 + 72 n\alpha]\cdot[m\alpha^2 - n\alpha] - \frac{1}{l^3}[\alpha^4 + 18 m\alpha^3 l - 18 n\alpha^2 l - 27 m^2\alpha^2 + 54 mn\alpha - 27 n^2]\cdot [\alpha^2 l - m\alpha + n]\right) - 1728 g_2^3 \left(\frac{1}{l}[8\alpha^3 l m - 72 m^2\alpha^2 + 72 nm\alpha] - \frac{1}{l^2}[\alpha^4 l^3 + 18 m\alpha^3 l^2 - 18 n\alpha^2 l^2 - 27 m^2\alpha^2 l + 54 mn\alpha l - 27 n^2 l]\right) = 0$$

oder

$$216 g_3 \beta (-\alpha^6 l^3 - 27 m^3\alpha^3 + 27 n^3 - 9 m\alpha^5 l^2 + 81 m^2\alpha^2 n - 27 n^2 l\alpha^2 - 27 m^2\alpha^4 l - 81 mn^2\alpha + 9 nl^2\alpha^4 + 54 mn\alpha^3 l)$$
$$= 1728 g_2^3 (-\alpha^4 l^4 - 10 m\alpha^3 l^3 + 18\alpha^2 nl^3 - 45 m^2\alpha^2 l^2 + 18\alpha nml^2 + 27 n^2 l^2)$$

oder

$$216\, g_3 \beta = \frac{(12\, g_2)^3}{[l\alpha^2 + 3 m \alpha - 3 n]^3} (\alpha^4 l^4 + 10 m \alpha^3 l^3$$
$$- 18 \alpha^2 n l^3 + 45 m^2 \alpha^2 l^2 - 18 \alpha n m l^2 - 27 n^2 l^2)$$

oder

14) $$216 g_3 \beta = \pm (\alpha^4 l^4 + 10 m \alpha^3 l^3 - 18 \alpha^2 n l^3$$
$$+ 45 m^2 \alpha^2 l^2 - 18 \alpha n m l^2 - 27 n^2 l^2).$$

Das Vorzeichen in 14) richtet sich, wie die Ableitung zeigt, ganz nach dem Vorzeichen in 12). Bilden wir nach 14) für unsre Beispiele β, so erhalten wir der Reihe nach für

I. $\beta = + 16{,}075004$
II. $\beta = + 5{,}948840$
III. $\beta = + 18{,}909885$
IV. $\beta = + 0{,}294098$

— — — — — —

also stets die entgegengesetzten Werte von denen, die wir gebrauchen. Legen wir g_3 in I, II, III, ... den mit (-1) multiplizierten Wert zu, so scheint alles in Ordnung zu sein. Kann nun g_3 negativ sein? Wir gewannen g_3 aus

15) $$g_3 = \pm \sqrt{\frac{g_2^3 - \varDelta}{27}},$$

mithin liegt die Möglichkeit vor. Ja, wir müssen sogar das Minuszeichen wählen. Wenn nämlich, um dies an irgend einem unserer 8 Beispiele durchzuführen,

$$\varDelta = 28{,}812041$$
$$g_2 = 3{,}554699$$

ist, so gehört

$$y_0 = -0{,}11778507$$

zu der Gleichung

16) $$\varDelta^3 y^5 + 10 \varDelta^2 y^3 + 45 \varDelta y - 216 g_3 = 0.$$

Da y_0 negativ ist, so hätten wir, wenn g_3 positiv, lauter negative Gröfsen in 16). Diese sind einzeln nicht gleich Null, mithin kann ihre Summe erst recht nicht gleich Null sein. Es ist

$$\Delta^3 y_0^5 + 10 \Delta y_0^3 + 45 \Delta y_0 = - 0{,}7723162 \cdot 216$$
$$- |216\, g_3| = - 0{,}7723162 \cdot 216.$$

Also folgt aus 16), daſs für g_3 in 15) das negative Zeichen gilt. Bei der Berechnung von h verwandten wir nun in I, ebenso in den übrigen sieben Beispielen,

$$g_3 = + \sqrt{\frac{g_2^3 - \Delta}{27}}.$$

Wir setzten die Gleichung an

$$4p^3 - 3{,}554699\,p - 0{,}7723162 = 0. \tag{17}$$

Diese würde jetzt lauten

$$4p^3 - 3{,}554699\,p + 0{,}7723162 = 0. \tag{18}$$

Die Wurzeln e_1, e_2, e_3 aus 17) hängen mit denen aus 18) e_1', e_2', e_3' in der Weise zusammen, daſs

$$e_1' = - e_3, \quad e_2' = - e_2, \quad e_3' = - e_1$$

ist. Durch diese Änderung der Gröſsen e bekommen wir aber Werte für y, die auch abgesehen vom Vorzeichen die Gleichung 16) niemals erfüllen, so daſs wir schlieſsen können, in 15) ist das Minuszeichen nicht zulässig. Somit ist ein Widerspruch hergeleitet, aus dem hervorgeht, daſs irgendwo noch ein Fehler stecken muſs. Wir sehen, daſs auch eine Erläuterung an Zahlenbeispielen wichtig und nützlich werden kann. *Dieser Fehler liegt in den Brioschischen Formeln, die ich hier in Teil II benutzt habe, auf die sich aber auch Kiepert bei Herleitung von 16) stützt. Brioschi* findet

$$(z_\infty - z_0)(z_2 - z_3)(z_4 - z_1) = \sqrt{5}\,[C_0 + C_1 + C_2 + C_3]^2$$

und setzt

$$y_0 = C_0 + C_1 + C_2 + C_3,$$

während sich, wie leicht durch unsere Beispiele bestätigt werden kann,

$$y_0 = - C_0 - C_1 - C_2 - C_3,$$

ebenso auch

$$y_\nu = - \varepsilon^\nu C_0 - \varepsilon^{2\nu} C_1 - \varepsilon^{3\nu} C_2 - \varepsilon^{4\nu} C_3$$

ergibt. In der Kiepertschen Arbeit tritt dieser Fehler nicht zu Tage, weil in der Zusammenstellung der zur Auflösung

einer Gleichung fünften Grades notwendigen Rechenoperationen die Brioschischen Gröfsen nicht verwandt werden und die Vorzeichen überhaupt unbestimmt gelassen werden, und weil in der Reduktionsformel 16) die Koeffizienten, bei denen der Vorzeichenfehler hätte auftreten müssen, gleich Null sind. Für $y_0 = C_0 + C_1 + C_2 + C_3$ lautet die Resolvente fünften Grades

$$\Delta^3 y^5 + 10 \Delta^2 y^3 + 45 \Delta y \mp 216 g_3 = 0,$$

die Formel 14) geht über in

$$216 g_3 \beta = \mp (\alpha^4 l^4 + 10 m \alpha^3 l^3 - 18 \alpha^2 n l^3 + 45 m^2 \alpha^2 l^2 - 18 \alpha n m l^2 - 27 n^2 l^2).$$

Wir erhalten somit, wenn wir unter Berücksichtigung der gegebenen Erörterungen alle zur Auflösung von Gleichungen fünften Grades notwendigen Rechenoperationen zusammenstellen, die folgenden:

1) Man nehme, wenn die allgemeine Gleichung fünften Grades lautet

$$x^5 + A x^4 + B x^3 + C x^2 + D x + E = 0,$$

für u einen beliebigen der beiden Werte, die sich aus der quadratischen Gleichung ergeben

$$\alpha_1) \quad (2 A^2 - 5 B) u^2 + (4 A^3 - 13 A B + 15 C) u + (2 A^4 - 8 A^2 B + 10 A C + 3 B^2 - 10 D) = 0$$

und berechne v aus

$$\alpha_2) \quad 5 v = - A u - A^2 + 2 B,$$

dann ist

$$\beta_1) \quad 5 l = - C (u^3 + A u^2 + B u + C) + D (4 u^2 + 3 A u + 2 B) - E (5 u + 2 A) - 10 v^3,$$

$$\beta_2) \quad 5 m = - D (u^4 + A u^3 + B u^2 + C u + D) + E (5 u^3 + 4 A u^2 + 3 B u + 2 C) + 5 v^4 + 10 l v,$$

$$\beta_3) \quad n = - E (u^5 + A u^4 + B u^3 + C u^2 + D u + E) - v^5 - 5 l v^2 + 5 m v.$$

2) Man nehme für α einen beliebigen der beiden Werte, die sich aus der quadratischen Gleichung ergeben:

α) $$(l^4 - l\,m\,n + m^3)\,\alpha^2 + (11\,l^3 m + l\,n^2 - 2\,m^2 n)\,\alpha$$
$$- 27\,l^3 n + 64\,l^2 m^2 + m\,n^2 = 0$$

und berechne g_2, Δ, β aus

β_1) $12\,g_2\,\varepsilon = l\,\alpha^2 + 3\,m\,\alpha - 3\,n,$

β_2) $\Delta\,\varepsilon = l^2\,[(l\,n - m^2)\,\alpha + m\,n],$

β_3) $216\,g_3\beta\,\varepsilon = -\,\alpha^4\,l^4 - 10\,m\,\alpha^3 l^3 + 18\,\alpha^2 n\,l^3$
$- 45\,m^2\,\alpha^2\,l^2 + 18\,\alpha\,n\,m\,l_2 + 27\,n^2\,l^2,$

wo
$$g_3 = +\sqrt{\frac{g_2{}^3 - \Delta}{27}}$$

und für ε nach Belieben $+1$ oder -1 zu setzen ist.

3) Man berechne $h = e^{\frac{\omega' \pi}{\omega}}$ durch die absolute Invariante
$$J = \frac{g_2{}^3}{\Delta}$$

nach einem Formelsystem, wie es Klein in den Mathematischen Annalen Band XIV gibt, oder durch die stark konvergierende Reihe
$$h = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \ldots,$$

wo
$$l = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}}$$

ist und e_1, e_2, e_3 die Wurzeln von
$$4\,p^3 - g_2\,p - g_3 = 0$$

sind. Man berechne weiter B aus

β_1) $$B = \Delta^{1/6} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda\, h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}},$$

die Gröfsen A_0, A_1, A_2 aus

β_2) $$B\,(A_0 + A_1\,\varepsilon + A_2\,\varepsilon^4) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda\, \varepsilon^{(6\lambda+1)^2}\, h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{60}},$$

sodann C_0, C_1, C_2, C_3 aus

γ_1) $$\begin{aligned} C_0 &= -\,A_1\,(4\,A_0{}^2 - A_1\,A_2) \\ C_1 &= 2\,A_0\,A_1{}^2 - A_2{}^3, \\ C_2 &= -\,(2\,A_0\,A_2{}^2 - A_1{}^3), \\ C_3 &= A_2\,(4\,A_0{}^2 - A_1\,A_2), \end{aligned}$$

so ist

γ_2 $$y_\nu = \varepsilon^\nu C_0 + \varepsilon^{2\nu} C_1 + \varepsilon^{3\nu} C_2 + \varepsilon^{4\nu} C_3$$
$$(\nu = 0, 1, 2, 3, 4)$$

und

4) $$z_\nu = -\frac{\alpha + \beta y_\nu}{3 + \Delta y_\nu^2},$$

schliefslich

$$x_\nu = -\frac{E + (z_\nu - v)(u^3 + A u^2 + B u + C) + (z_\nu - v)^2 (2u + A)}{u^4 + A u^3 + B u^2 + C_1 u + D + (z_\nu - v)(3u^2 + 2 A u + B) + (z_\nu - v)^2}.$$

Nach diesen Formeln wollen wir nun zum Schlufs noch das Beispiel berechnen

$$x^5 + 5x^3 + 5x - 5 = 0.$$

Es ist

$u = 1$, $v = 2$, $l = 3$, $m = -3$, $n = -92$, $\alpha = -1{,}705427$,
$g_2 = 25{,}00619$, $\Delta = 6858{,}420$, $g_3 = 18{,}03103$,
$\beta = 471{,}19140$, $e_1 = 2{,}803474$, $e_2 = -0{,}80428586$,
$e_3 = -1{,}9991883$, $h = 0{,}017872568$, $B = 3{,}1158805$,
$A_0 = 0{,}060001736$, $A_1 = -0{,}30021177$, $A_2 = 0{,}01199223$,
$C_0 = +0{,}005404125$, $C_1 = +0{,}01081382$, $C_2 = -0{,}02707448$,
$C_3 = +0{,}000215872$, $y_0 = -0{,}010640645$,

$$y_{1,3} = +0{,}01489181 \pm i \cdot 0{,}02720452$$
$$y_{2,4} = -0{,}009571488 \mp i \cdot 0{,}03298435$$
$$z_0 = 1{,}7791999$$
$$z_{1,3} = -2{,}18946203 \pm i \cdot 1{,}1744229$$
$$z_{2,4} = +1{,}29986369 \mp i \cdot 2{,}5859040$$

und endlich

$$\mathbf{x_0 = 0{,}67087471}$$
$$\mathbf{x_{1,3} = 0{,}20731110 \mp i \cdot 2{,}0062690}$$
$$\mathbf{x_{2,4} = -0{,}54274980 \pm i \cdot 1{,}2399453}$$

II.

Auflösung nach Hermite.

Wenn wir mit k den Modul des elliptischen Integrals

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

bezeichnen und unter λ den transformierten Modul verstehen, d. h. den Modul, in den k bei der Periodentransformation n ten Grades übergeht, so besteht, wie Jacobi[1]) bez. Sohnke[2]) gezeigt hat, zwischen $\sqrt[4]{k} = u$ und $\sqrt[4]{\lambda} = v$ eine Gleichung vom Grade $n + 1$, die sogenannte Modulargleichung. Sie lautet für $n = 5$

$$u^4 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) + 4uv(1 - u^4v^4) = 0. \tag{19}$$

Hier ist v als Unbekannte anzusehen, die übrigen Gröfsen sind zu den Koeffizienten zu rechnen. Diese haben dann, wie unmittelbar ersichtlich, einen variablen Parameter u. Legen wir u einen bestimmten Wert bei, so können wir K und K′ aus den Integralen berechnen:

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

und

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

$$(k^2 + k'^2 = 1).$$

Setzen wir

$$-\frac{K'}{K} = i\omega$$

---

[1]) siehe Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum (1829).

[2]) siehe Aequationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum (Journ. f. r. u. a. Math. 1834).

und führen das Hermitesche Funktionszeichen $\varphi(x)$ ein, so sind die Wurzeln von 19)

$$v_\infty = -\varphi(5\omega); \qquad v_0 = \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right); \qquad v_1 = \varphi\left(\frac{\omega+16}{5}\right);$$

$$v_2 = \varphi\left(\frac{\omega+32}{5}\right); \qquad v_3 = \varphi\left(\frac{\omega+48}{5}\right); \quad v_4 = \varphi\left(\frac{\omega+64}{5}\right),$$

also für jeden Wert des Parameters u bekannt. Um nun zu erkennen, ob wir aus 19) eine Gleichung fünften Grades herstellen können, ist es zweckmäfsig, die Gruppe der Modulargleichung zu bestimmen. Dies hat zuerst Galois[1]) getan. Er adjungierte dem Rationalitätsbereiche die Gröfse $\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n}$ und fand, dafs ihre Ordnung $= \frac{1}{2} n (n^2 - 1)$ ist und für $n = 5$ einen solchen Teiler hat, dafs die Resolventenbildung fünften Grades möglich ist. Hermite[2]) gelang es, die als möglich erkannte Resolvente aufzustellen. Setzt man

$$x_0 = (v_0 - v_\infty)(v_1 - v_4)(v_2 - v_3) = \Phi(\omega),$$

dem entsprechend

$$x_1 = (v_1 - v_\infty)(v_2 - v_0)(v_3 - v_4) = \Phi(\omega + 16),$$
$$x_2 = (v_2 - v_\infty)(v_3 - v_1)(v_4 - v_0) = \Phi(\omega + 32),$$
$$- - - - - - - - - - - ,$$

so lautet die zu diesen Werten gehörige Gleichung

20) $$x^5 - 2^4 \cdot 5^3 u^4 (1-u^8)^2 x - 2^6 \sqrt{5^5}\, u^3 (1+u^8)^2 (1+u^8) = 0.$$

Durch die Substitution

$$x = 2\sqrt[4]{5^5} \cdot u \cdot \sqrt{1-u^8} \cdot y$$

geht 20) über in

21) $$y^5 - y - \frac{2}{\sqrt[4]{5^5}} \frac{1+u^8}{u^2\sqrt{1-u^8}} = 0.$$

Auf die Form

22) $$y^5 - y - D = 0,$$

[1]) siehe Oeuvres de Galois, Liouville's Journal t. XI. 1846.

[2]) siehe die Abhandlungen in den Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 1858 t. 46 und 1865—66 t. 61—62.

welche die Bring-Jerrardsche Hauptform genannt wird, kann man nun aber jede Gleichung fünften Grades

23) $$Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0$$

bringen. Aus der Vergleichung von 22) mit 21) ergibt sich

$$D = \frac{2}{\sqrt[4]{5^5}} \cdot \frac{1 + u^8}{u^2 \sqrt{1 - u^8}},$$

also u^4 oder k, mithin die Wurzeln von 21) oder 22). Mit den Wurzeln von 22) sind aber auch die von 23) bekannt. Wir erhalten demnach folgendes

Formelsystem nach Hermite:

Gegeben ist die Bring-Jerrardsche Hauptform der Gleichungen fünften Grades

24) $$x^5 - x - D = 0.$$

1. Man setze

$$A = \frac{\sqrt[2]{5^5}\, D^2}{4}$$

und berechne eine Wurzel der Gleichung

25) $$k^4 + Ak^3 + 2k^2 - Ak + 1 = 0.$$

(Für $\frac{1}{4A} = \sin\alpha$ sind die Wurzeln von 25)

$$k = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4},\ \operatorname{tg}\frac{\alpha + 2\pi}{4},\ \operatorname{tg}\frac{\pi - \alpha}{4},\ \operatorname{tg}\frac{3\pi - \alpha}{4}\Big).$$

2. Man nehme einen der erhaltenen Werte k und berechne $\sqrt{k'}$ aus der Relation

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

dann ist

$$l = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}},$$

$$h = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{15} + \ldots.$$

3. Für h in

$$\sqrt{2}\, h^{1/8} \frac{\Sigma h^{2m^2+m}}{\Sigma h^{m^2}}$$

$$(m = -\infty \ldots . + \infty)$$

setze man der Reihe nach

$$h^5,\ h^{1/5},\ \varepsilon h^{1/5},\ \varepsilon^2 h^{1/5},\ \varepsilon^3 h^{1/5},\ \varepsilon^4 h^{1/5}$$

$$\left(\varepsilon = e^{\frac{2 i \pi}{n}}\right),$$

so erhält man 6 Werte, die wir mit

$$v_\infty,\ v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$$

bezeichnen. Weiter ist

$$4)\qquad \begin{aligned} \Phi_0 &= (v_0 - v_\infty)\,(v_1 - v_4)\,(v_2 - v_3) \\ \Phi_1 &= (v_1 - v_\infty)\,(v_2 - v_0)\,(v_3 - v_4) \\ \Phi_2 &= (v_2 - v_\infty)\,(v_3 - v_1)\,(v_4 - v_0) \\ \Phi_3 &= (v_3 \quad v_\infty)\,(v_4 - v_2)\,(v_0 - v_1) \\ \Phi_4 &= (v_4 - v_\infty)\,(v_0 - v_3)\,(v_1 - v_2). \end{aligned}$$

5. Als Wurzeln von 24) erhält man

$$x_\nu = \frac{\Phi_\nu}{2\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[4]{k}\cdot k'}$$

$$(\nu = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Beispiel:

Für
$$x^5 - x - \sqrt[4]{\frac{2^3}{5\cdot 3^3}} = 0$$

ist

$$A = \frac{\sqrt[2]{5^5}\cdot\sqrt[2]{2^2}}{4\cdot\sqrt[2]{5\cdot 3^3}} = \frac{25}{6}.$$

Eine Wurzel der Gleichung

$$k^4 + \frac{25}{6}k^3 + 2k^2 - \frac{25}{6}k + 1 = 0$$

ist

$$k = \frac{1}{2}.$$

$$\sqrt{k'} = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

$$l = \frac{1 - \sqrt[4]{\frac{3}{4}}}{1 + \sqrt[4]{\frac{3}{4}}}.$$

$$h = 0{,}0179714$$

$$\Phi_0 = 5{,}75901$$

$$x_0 = 1{,}0844$$

— — — — —

III.

Auflösung nach Brioschi.

Brioschi benutzt zur Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades statt der Modulargleichung 19) die sogenannte Multiplikatorgleichung, d. h. die Gleichung, welcher der bei der Transformation des Ausdrucks

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

in

$$\frac{1}{M} \cdot \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}}$$

auftretende Multiplikator

$$M = \left[n \frac{k - k^3}{\lambda - \lambda^3} \cdot \frac{d\lambda}{dk} \right]^{1/2}$$

genügt. Sie lautet für

$$z = M - 1 \text{ und } n = 5$$

26) $$z^6 - 4z^5 + 256k^2(1-k^2)z + 256k^2(1-k^2) = 0.$$

Die Wurzeln der Multiplikatorgleichung, die allgemein

$$M_\infty, M_1, M_2, M_3, M_4, M_0$$

heifsen mögen, sind wie in 19) für jeden Wert von k bekannt.

Sie unterliegen, worauf Jacobi aufmerksam gemacht hat, den Relationen

$$27)\qquad \begin{aligned} \sqrt{M_\infty} &= \sqrt{5}\, A_0 \\ \sqrt{M_r} &= A_0 + \varepsilon^r A_1 + \varepsilon^{4r} A_2 \\ &(r = 0, 1, 2, 3, 4.) \end{aligned}$$

Allgemein führt eine Gröfse $\sqrt{z}$, die den Bedingungen 27) genügt, auf eine Gleichung von der Form

$$28)\qquad (z-a)^6 - 4a\,(z-a)^5 + 10\,b\,(z-a)^3 - 4\,c\,(z-a) + 5\,b^2 - a\,c = 0.$$

Unterwerfen wir jetzt 26) der Reihe nach den Substitutionen

$$v = z^4 - 4\,z^3, \quad \omega = \frac{v}{d^{2/3}},$$

wo

$$d = 256\,k^2\,k'^2$$

ist, so erhalten wir

$$29)\qquad v^6 + 10\,d^2\,v^3 + (16\,d^3 - d^4)\,v + 5\,d^4 = 0,$$

$$30)\qquad \omega^6 + 16\,\omega^3 + \frac{16-d}{d^{1/3}}\,\omega + 5 = 0.$$

Um 28) auf den fünften Grad zu reduzieren, kann man, dem Vorgange Hermites folgend, die Gröfse

$$x = (z_\infty - z_0)\,(z_1 - z_4)\,(z_2 - z_3)$$

benutzen. Brioschi[1]) zeigt aber, dafs bereits die Quadrat-

[1]) siehe seine hierher gehörigen Arbeiten:

Sulle equazioni del moltiplicatore per la trasformazione delle funzioni ellittiche (Annali di Tortolini I 1858),

Sulla risoluzione dell equazioni di quinto grado (Annali di Tortolini I 1858),

Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni del quinto grado (Atti del Istituto Lombardo I 1858),

Sur diverses équations analogues aux équations modulaires dans la théorie des functions elliptiques (Comptes Rendus 1858),

Sulla risolvente di Malfatti per le equazioni del quinto grado (Annali di Tortolini V 1864).

Supra alcune nuove relazioni modulari (Atti della R. Accademia di Napoli 1866),

La soluzione più generale delle equazioni del quinto grado (Annali di Matematica ser. II t. I. 1867),

wurzel aus ihr ein zur Aufstellung einer Resolvente geeigneter Ausdruck ist. Setzt man

$$t_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} [(z_\infty - z_0)(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)]^{1/2}$$

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} [(z_\infty - z_1)(z_3 - z_4)(z_0 - z_2)]^{1/2}$$

— — — — — — — — — — —,

so sind dies die Wurzeln der Gleichung

$$t^5 + 10bt^3 + 5(9b^2 - 4ac)t - 8\sqrt{-h} = 0,$$

$$h = 27b^5 - c^3 - 25a^3b^4 + 40a^4b^2c + 20a^2bc^2 - 45ab^3c - 16a^5c^2.$$

Die entsprechenden Resolventen von 29) und 30) lauten:

$$31)\quad t^5 + 1280k^2(1-k^2)t + 2048k^2(1-k^2)(1-2k^2) = 0.$$

$$32)\quad t^5 + 10t^3 + 45t - 8\left[\frac{(16k^2k'^2-1)^3}{4k^2k'^2} - 27\right]^{1/2} = 0.$$

Mit Hilfe von 31) ergibt sich jetzt die Lösung von 23) in ähnlicher Weise wie oben. Es läfst sich indessen zur Wurzelbestimmung von 23) ebensogut auch 32) verwenden, da 23) auf die Form

$$z^5 - 10z^3 + 45z - \gamma = 0$$

und weiter durch

$$\left| z \quad z_i \right|$$

auf die Form

$$z^5 + 10z^3 + 45z - g = 0$$

transformiert werden kann.

Bevor ich für diese Methode das fertige Formelsystem gebe, möchte ich bemerken, dafs ich es für die numerische Berechnung für zweckmäfsig halte, denselben Weg, den ich

---

Sur l'équation du cinquième degré (Comptes Rendus 1875, 1),
Sopra una classe di forme binarie (Annali di Matematica ser. II t. VIII 1876).
Über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades (Mathem. Annalen XIII 1878).

schon bei der Kiepertschen Lösung eingeschlagen habe, auch hier zu wählen, d. h. nicht den Multiplikator M_ν zu berechnen, sondern die Gröfsen A_0, A_1, A_2 in den Relationen 27). Sodann ist der schon oben bei der Kiepertschen Auflösung in der Reduktionsformel für

$$y_\nu = \varepsilon^\nu C_0 + \varepsilon^{2\nu} C_1 + \varepsilon^{3\nu} C_2 + \varepsilon^{4\nu} C_3$$

erkannte Vorzeichenfehler zu berücksichtigen. Wenn wir dies beachten, läfst sich aus den Entwicklungen, die Brioschi gegeben hat, folgendes Formelsystem herausziehen:

Formelsystem nach Brioschi.

Gegeben ist

$$x^5 + x + D = 0. \tag{33}$$

1. Man setze

$$a = \frac{\sqrt[2]{5^5}\, D^2}{4}$$

und berechne μ aus der Gleichung

$$1 - 4\mu = a\sqrt{\mu},$$

dann ist

$$k^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\mu}}{2}.$$

2. Der Wert für $\sqrt{k'}$ ergibt sich aus der Relation

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

der Wert für l und h aus

$$l = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}},$$

$$h = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \ldots$$

3. Man berechne

$$B = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} h^{\lambda^2}$$

$$A_0 = \frac{1}{B}\sum_{\lambda} h^{5\lambda^2}$$

$$A_1 = \frac{2\, h^{\frac{1}{5}}}{B} \sum_{\lambda} h^{5\lambda^2 + 2\lambda}$$

$$A_2 = \frac{2\, h^{\frac{4}{5}}}{B} \sum_{\lambda} h^{5\lambda^2 + 4\lambda}$$

$$C_0 = -A_1 (4 A_0^2 - A_1 A_2)$$
$$C_1 = 2 A_0 A_1^2 - A_1^3$$
$$C_2 = -(2 A_0 A_2^2 - A_1^3)$$
$$C_3 = A_2 (4 A_0^2 - A_1 A_2),$$

dann ist

4. $$y_\nu = \varepsilon^\nu C_0 + \varepsilon^{2\nu} C_1 + \varepsilon^{3\nu} C_2 + \varepsilon^{4\nu} C_3$$
$$(\nu = 0, 1, 2, 3, 4).$$

5. $$x_\nu = \frac{y_\nu}{1280\,\mu \cdot \sqrt[4]{1280\,\mu}}.$$

Beispiel:

$$z^5 + 75\,z - 105 = 0.$$

Es ist für

$$z = \sqrt[4]{75^5} \cdot x$$

$$x^5 + x - \frac{105}{\sqrt[4]{75^5}} = 0$$

$$\alpha = \frac{49}{4\sqrt{15}}$$

$$1 - 4\,\mu = \frac{49}{4\sqrt{15}} \sqrt{\mu}$$

$$\mu = \frac{15}{256}$$

$$k^2 = \frac{1}{16}$$

$$\sqrt{k'} = \sqrt[4]{\frac{15}{16}}$$

$$h = 0,16693$$
$$B = 1,33541$$
$$A_0 = 0,74903$$
$$A_1 = 1,0518$$
$$A_2 = 0,41733$$
$$C_0 = -1,89878$$
$$C_1 = +1,58471$$
$$C_2 = +0,90279$$
$$C_3 = +0,75338$$
$$z_0 = 1,3421.$$

— — — —

IV.

Auflösung nach Klein—Gordan[1]).

Bezeichnen wir mit f, H, T die drei Grundformen des Ikosaeders, wo

$$f = z_1 \cdot z_2 (z_1^{10} + 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10})$$

ist, H die Hessesche Kovariante von f

$$H = -(z_1^{20} + z_2^{20}) + 228 (z_1^{15} z_2^5 - z_1^5 z_2^{15}) - 494 z_1^{10} z_2^{10}$$

---

1) Die hier entwickelte Methode geben Klein und Gordan in den Schriften:

Klein: Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst (Math. Annal. Bd. 9),

—, Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder (Math. Annal. Bd. 12).

—, Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen 5. Grades (Mathem. Annal. Bd. 14), siehe auch die Abhandlungen in den Mathem. Annalen Bd. 15, 17, 61.

—, Vorlesungen über das Ikosaeder. Leipzig 1884.

Gordan: Über die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade (Mathem. Annal. Bd. 13, 28).

und T die Funktionaldeterminante von f und H

$$T=(z_1^{30}+z_2^{30})+522(z_1^{25}z_2^{5}-z_1^{5}z_2^{25})-10005(z_1^{20}z_2^{10}+z_1^{10}z_2^{20}),$$

so besteht die Beziehung

$$T^2+H^3=+1728\,f^5.$$

Setzt man $\frac{H^3}{1728\,f^5}=Z$, so kann man, wenn $\frac{z_1}{z_2}=z$ gegeben ist, ohne weiteres Z berechnen, aber auch umgekehrt läſst sich, wenn Z gegeben ist, durch hypergeometrische Reihen oder elliptische Funktionen z ausrechnen. Wir erhalten

$$z=Z^{\frac{1}{3}}\frac{F\left(\frac{11}{60},\frac{19}{60},\frac{4}{3},Z\right)}{F\left(\frac{11}{60},-\frac{1}{60},\frac{1}{3},Z\right)} \tag{34}$$

oder

$$z=q^{\frac{2}{5}}\frac{\vartheta_1\left(\frac{2\,iK'\pi}{K},\,q^5\right)}{\vartheta_1\left(\frac{iK'\pi}{K},\,q^5\right)}. \tag{35}$$

Die Ikosaedergleichung bleibt bei sämtlichen Ikosaedersubstitutionen unverändert, da dies von den Formen H, f wie T gilt. Sie ist vom 60. Grade und ihre eigene Galoissche Resolvente. Da nun in der ikosaedrischen Gruppe fünf gleichberechtigte tetraedrische Untergruppen enthalten sind, so ist die Möglichkeit einer Resolventenbildung 5. Grades gegeben. Bildet man eine Funktion, welche bei den Substitutionen einer dieser Untergruppen unverändert bleibt, und zwar nur bei diesen, so nimmt diese Funktion, wenn man auf sie sämtliche ikosaedrische Substitutionen anwendet, fünf verschiedene Werte an. Die Koeffizienten der Gleichung, der diese Werte genügen, müssen, da sie alle ikosaedrischen Substitutionen zulassen, rationale Funktionen von Z sein. Nimmt man die oktaedrische Form

$$t=z_1^6+2z_1^5z_2-5z_1^4z_2^2-5z_1^2z_2^4-2z_1z_2^5+z_2^6$$

und den entsprechenden Würfel

$$W = - z_1^8 + z_1^7 z_2 - 7 z_1^6 z_2^2 - 7 z_1^5 z_2^3 + 7 z_1^3 z_2^5 - 7 z_1^2 z_2^6 - z_1 z_2^7 - z_2^8$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z$$

und bildet für

$$y = m \frac{12 f W}{H} + n \frac{12^2 f^3 W t}{H T}$$

die Resolvente fünften Grades, so erhält man

$$Z y^5 + 5 y^2 \left(8 m^3 + 12 m^2 n + \frac{6 m n^2 + n^3}{1 - Z}\right) + 15 y \left(- 4 m^4 + \frac{6 m^2 n^2 + 4 m n^3}{1 - Z} + \frac{3 n^4}{4 (1 - Z)^2}\right) + 3 \left(48 m^5 - \frac{40 m^3 n^2}{1 - Z} + \frac{15 m n^4 + 4 n^5}{(1 - Z)^2}\right) = 0. \tag{36}$$

Setzt man diese Gleichung gleich der entsprechenden Hauptform einer allgemeinen Gleichung fünften Grades, so lassen sich Z, z, y berechnen, mithin die Wurzeln einer Gleichung fünften Grades.

Zu diesem Resultat gelangt Klein auf mehr geometrischem Wege, Gordan, indem er auf die doppelt binäre Form

$$f = y_1^3 x_1^2 x_2 + y_1^2 y_2 x_2^3 + y_1 y_2^2 x_1^3 - y_2^3 x_1 x_2^2$$

die Prozesse der Invariantentheorie anwendet.

Will man nun nach dieser Methode ein Zahlenbeispiel durchführen, so stellen sich eine Reihe von Schwierigkeiten ein. Um die Ikosaederirrationalität z aus Z zu gewinnen, können wir Z der absoluten Invariante J der elliptischen Modulfunktionen gleich setzen, h mit Hilfe von J bestimmen und die Formel 35) anwenden. Um dies ausführen zu können, gibt Klein noch die Beziehungen

$$37)\quad z_1 = \frac{i}{2\pi\sqrt[12]{J}}\left[(\log J - k)\cdot F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, \frac{1}{J}\right) - \frac{\partial F\left(\frac{1}{12}+\varrho, \frac{5}{12}+\varrho, 1+2\varrho, \frac{1}{J}\right)}{\partial\varrho \quad [\varrho=0]}\right]$$

$$= \frac{i}{2\pi\sqrt[12]{J-1}}\left[(\log(J-1) - k)\cdot F\left(\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, 1, \frac{1}{1-J}\right) - \frac{\partial F\left(\frac{1}{12}+\varrho, \frac{7}{12}+\varrho, 1+2\varrho, \frac{1}{1-J}\right)}{\partial\varrho \quad [\varrho=0]}\right]$$

$$= \pm\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}\,\frac{\Pi(0)\cdot\Pi\left(-\frac{2}{3}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{12}\right)\cdot\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)}\cdot F\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{2}{3}, J\right)$$

$$+\left(i\mp(2+\sqrt{3})\right)\frac{\Pi(0)\cdot\Pi\left(-\frac{2}{3}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{12}\right)\cdot\Pi\left(-\frac{5}{12}\right)}\cdot F\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{2}, 1-J\right)$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt[12]{J}}\,F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, \frac{1}{J}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt[12]{J-1}}\,F\left(\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, 1, \frac{1}{1-J}\right)$$

$$= \pm i\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\,\frac{\Pi(0)\cdot\Pi\left(-\frac{2}{3}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{12}\right)\cdot\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)}\cdot F\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{2}{3}, J\right)$$

$$+\left(1\mp(2+\sqrt{3})i\right)\frac{\Pi(0)\cdot\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{12}\right)\cdot\Pi\left(-\frac{5}{12}\right)}\,F\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{2}, 1-J\right).$$

Hat man die Gröfsen z_1 und z_2, so ist

$$\omega_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2\sqrt{3}}} \frac{z_1}{\sqrt[12]{\Delta}}$$

$$\omega_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2\sqrt{3}}} \frac{z_2}{\sqrt[12]{\Delta}}.$$

Mit ω_1, ω_2 ist aber h gegeben. Es ist von den drei Reihen für z_1 und z_2 stets die auszuwählen, die für ein gegebenes J konvergiert, von den doppelten Vorzeichen das obere zu nehmen für ein der positiven Halbebene angehörendes J, im andern Falle das untere. k bedeutet die Zahl $-5\log 2 - 3\log 3 + 2\sqrt{3}\log(2-\sqrt{3})$, F die hypergeometrische Funktion und Π die Gaufssche Funktion, die mit der Eulerschen Γ-Funktion durch die Gleichung verbunden ist

$$\Pi(z-1) = \Gamma(z).$$

Setzt man in 37) für J einen bestimmten Wert ein, in 35) den sich aus 37) für

$$h = e^{\frac{\omega_1 \pi i}{\omega_2}} = e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q$$

ergebenden, so erhält man aber einen falschen Wert für die Ikosaederirrationalität. Es mufs mithin in den Formeln 35), 37) ein Versehen vorliegen. Klein sagt im 61. Bande der Mathematischen Annalen: „Es mufs in 35) statt $q^{\frac{2}{5}}$ heifsen $-q^{\frac{3}{5}}$, also

$$x = -q^{\frac{3}{5}} \frac{\vartheta_1\left(\frac{2iK'\pi}{K}, q^5\right)}{\vartheta_1\left(\frac{iK'\pi}{K}, q^5\right)}. \tag{38}$$

Dieser Fehler findet sich bereits in meinen Vorlesungen über das Ikosaeder S. 132; in meinen früheren Publikationen, sowie in Klein—Fricke sind die Formeln richtig. Vergl. Scheibner: Zur Auflösung der Ikosaedergleichung in den Berichten der mathem. physik. Klasse der Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig 1905". Führt man jedoch

Druckfehler-Berichtigung.

S. 45. Die Formel mufs heifsen:

$$x = q^{-\frac{3}{5}} \frac{\vartheta_1\left(\frac{iK'\pi}{K}, q^5\right)}{\vartheta_1\left(\frac{2iK'\pi}{K}, q^5\right)}.$$

die Rechnung mit 38) durch, so findet man, dafs auch diese Formel nicht stimmt. Sie mufs heifsen

$$x = 9^{-\frac{3}{5}} \frac{\vartheta_1\left(\frac{iK'\pi}{K}, q^5\right)}{\vartheta_1\left(\frac{2iK'\pi}{K}, q^5\right)}.$$

Aber auch jetzt erhält man bei einer numerischen Berechnung von z noch kein richtiges Resultat. Auch die Formel 37) enthält einen Fehler. Da nun die zahlenmäfsige Durchführung solcher Reihen wie in 37) einen grofsen Zeitaufwand erfordert und es bei einer praktischen Berechnung weniger auf das an sich sehr wichtige theoretische Resultat ankommt, h aus J berechnen zu können, ohne eine accessorische Irrationalität einzuführen, so habe ich für 37) folgende Formeln aufgestellt:

Man berechne die Wurzeln y_1, y_2, y_3 der Gleichung

$$4y^3 - y - \sqrt{\frac{J-1}{27J}} = 0$$

l aus

$$l = \frac{\sqrt[4]{y_1 - y_3} - \sqrt[4]{y_1 - y_2}}{\sqrt[4]{y_1 - y_3} + \sqrt[4]{y_1 - y_2}},$$

dann ist

$$h = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + \ldots\ldots$$

Man hätte zur Ikosaederirrationalität z statt durch 35) auch durch die hypergeometrischen Reihen 34) gelangen können. Indessen diese von Weber aufgestellte Formel 34) enthält ebenfalls einen Fehler, wie die numerische Rechnung erweist. Wir erhalten mit Berücksichtigung dieser Bemerkungen folgendes

Formelsystem nach Klein—Gordan:

Gegeben ist

$$x^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0.$$

Lebenslauf.

Ich, Arthur Morgenstern, bin geboren am 29. April 1880 zu Berlin als Sohn des Oberzahlmeisters Morgenstern und seiner Ehefrau Marie geb. Schultz.

Meine Schulbildung erhielt ich auf dem Lessing-Gymnasium zu Berlin, woselbst ich mir Michaelis 1899 das Zeugnis der Reife erwarb. Sodann bezog ich die Universität Berlin (Michaelis 99 bis Ostern 01 und Michaelis 01 bis Michaelis 03) und Freiburg i. B. (Ostern 01 bis Michaelis 01), um mich in erster Linie dem Studium der Mathematik, Physik und Chemie zu widmen. Ich hörte Vorlesungen folgender Herren Dozenten: Blasius, Bornhak, Dilthey, Frobenius, Hensel, Hettner, Klein, Kossina, Landau, Landolt, Lehmann-Filhés, Lenz, Löwy, Lüroth, Martens, Mendel, Naudé, Oncken, Paulsen, Pernice, Planck, Pringsheim, Schwarz, Seckel, Sering, Struck, Stumpf, Voigt, Warburg.

Allen meinen verehrten Lehrern fühle ich mich zu grofsem Dank verpflichtet.